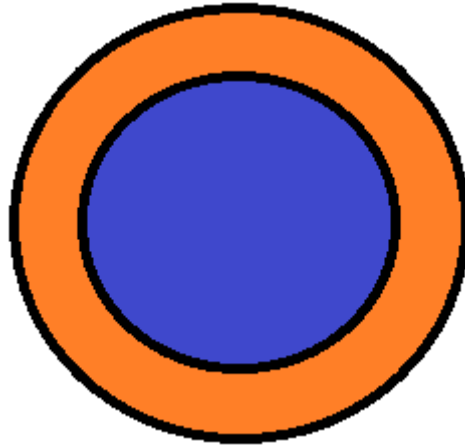
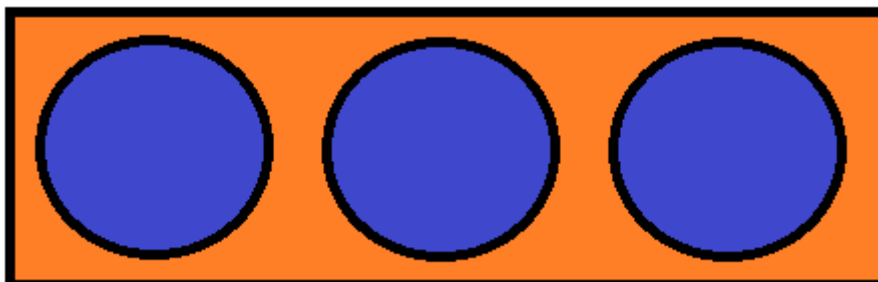


Aufgaben: Kreise, Kreise und Kreisausschnitte

- 1) Ein Kreis hat einen Durchmesser von 8cm. Wie groß sind der Umfang und die Fläche?
- 2) Der Boden eines kreisrunden Pools mit einem Durchmesser von 9,8m soll gestrichen werden. Die Farbe für 5m^2 kostet 14€.
 - a) Wie groß sind die Kosten für das Streichen, wenn beliebig viele Liter gekauft werden können?
 - b) Wie groß wären die Kosten, wenn nur 5-Liter Eimer gekauft werden können?
- 3) a) Der Umfang eines Kreises beträgt 30cm. Wie groß ist dessen Radius?
b) Ein Fahrrad legt, wenn sich ein Reifen 100-mal dreht, insgesamt 200m zurück.
Wie groß ist der Durchmesser des Reifens?
- 4) Innerhalb eines Kreises mit 10cm Durchmesser befindet sich ein Kreis mit 8cm Durchmesser. Wie groß ist die Fläche des Kreistrings?

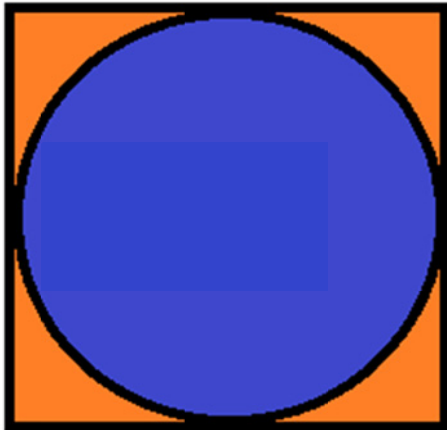


- 5) Ein Beet und ein runder Weg um das Beet bilden einen Kreistring. Das Beet hat einen Durchmesser von 4,8m und der Weg ist 1m breit.
 - a) Welche Fläche hat der Weg?
 - b) Welche Kosten entstehen beim Pflastern des Weges, wenn für 1m^2 die Pflastersteine 40€ kosten?
- 6) Aus einem rechteckigen Blech mit den Maßen 28cm x 10cm sollen 3 Kreise mit jeweils Radius $r = 4\text{cm}$ ausgestanzt werden.
 - a) Wie groß ist die Fläche des Abfalls (orangen Fläche)?
 - b) Wie viel Prozent beträgt der Abfall an der gesamten Rechteckfläche?

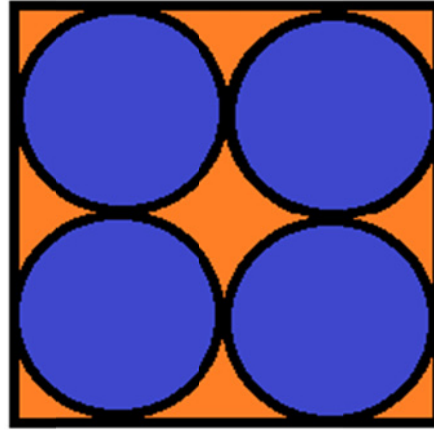


7) Mit einem Quadrat mit 10cm Seitenlänge wurden Kreise umrahmt. Wie groß ist die (orangene) Fläche innerhalb der Quadrate und außerhalb der Kreise?

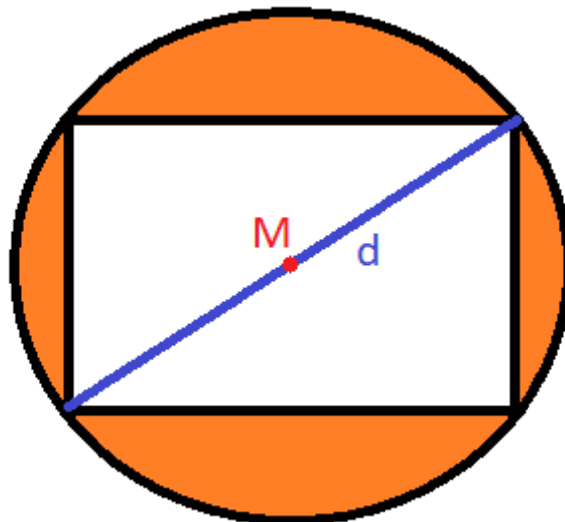
a)



b)



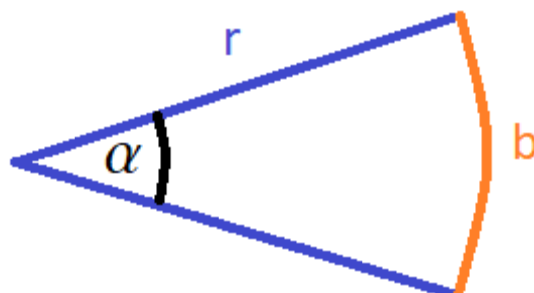
8) Innerhalb eines Kreises befindet sich ein Quadrat mit den Seitenlängen 9cm und 12cm. Die Diagonale d ist 15cm lang. Wie groß ist die (orangene) Fläche innerhalb des Kreises und außerhalb des Rechtecks?



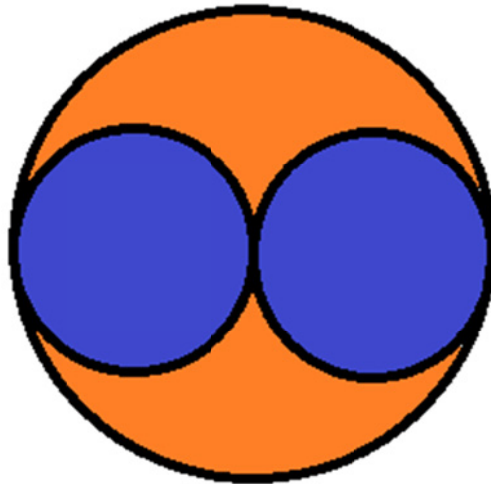
9) Ein Kreisausschnitt hat einen Radius von 14cm und einen Winkel von $\alpha = 40^\circ$.

a) Wie groß ist die Fläche und wie groß die Länge des Kreisbogens b ?

b) Wie groß ist der komplette Umfang des Kreisausschnitts?



10) In einem großen Kreis wurden zwei kleinere Kreise einverleibt:

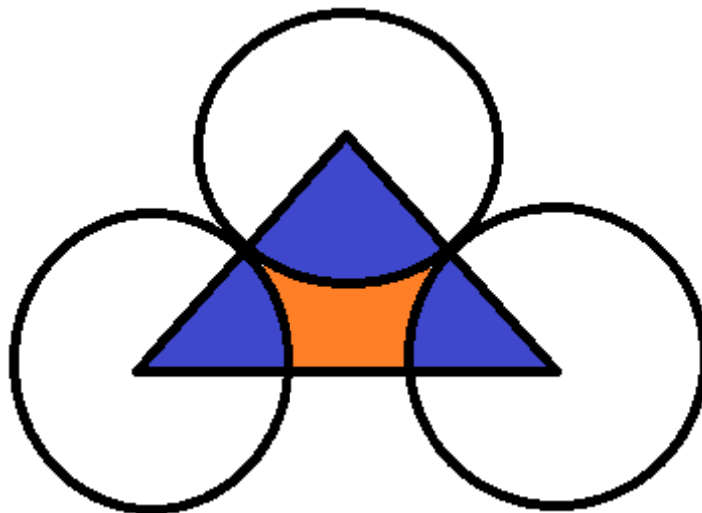


a) Wie groß ist die (orangene) Fläche innerhalb des großen Kreises und außerhalb der kleinen Kreise, wenn der große Kreis einen Radius von 12cm hat?

b) Es soll eine Formel für die Fläche aus a) hergeleitet werden, wenn der große Kreis den Radius R hat.

11) Wenn ein Kreisausschnitt eine Bogenlänge von $b = 8,9\text{m}$ hat und einen Winkel α von 60° , wie groß ist dann der Radius?

12) Um die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks wurden Kreise mit gleich großen Radien gezogen. Die beiden Basiswinkel betragen 45° und die Schenkel sind jeweils 12cm lang. Gesucht wird die (orangene) Fläche innerhalb des Dreiecks und außerhalb der Kreise.



Lösungen:

1) Ein Kreis hat einen Durchmesser von 8cm. Wie groß sind der Umfang und die Fläche?

$$d = 8\text{cm} \Rightarrow r = 8\text{cm} : 2 = 4\text{cm}$$

$$A = r^2 \cdot \pi = (4\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 50,25\text{cm}^2 \quad (\text{Ohne Einheiten: } A = r^2 \cdot \pi = 4^2 \cdot \pi)$$

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 4\text{cm} \cdot \pi \approx 25,13\text{cm}$$

$$(\text{oder } U = d \cdot \pi)$$

2) Der Boden eines kreisrunden Pools mit einem Durchmesser von 9,8m soll gestrichen werden. Die Farbe für 5m² kostet 14€.

a) Wie groß sind die Kosten für das Streichen, wenn beliebig viele Liter gekauft werden können?

$$d = 9,8\text{m} \Rightarrow r = 9,8\text{m} : 2 = 4,9\text{m}$$

$$A = r^2 \cdot \pi = (4,9\text{m})^2 \cdot \pi \approx 75,43\text{m}^2 \quad (\text{Ohne Einheiten: } A = r^2 \cdot \pi = 4,9^2 \cdot \pi)$$

Wenn 5m² insgesamt 14€ kosten, dann kostet die Farbe für 1m²: $14/5\text{€} = 2,8\text{€}$. Damit kostet die Farbe für 75,43m² ca. $75,43 \cdot 2,8\text{€} = 211,20\text{€}$.

Fläche in m ²	Preis in €
5	14
1	$14/5 = 2,8$
75,43	$75,43 \cdot 2,8 = 211,20$

b) Wie groß wären die Kosten, wenn nur 5-Liter Eimer gekauft werden können?

Für 75m² würden wir $75/5 = 15$ Eimer benötigen. Da wir nur ganze Eimer kaufen können, benötigen wir für 75,43m² insgesamt 16 Eimer (und es bleibt Farbe für 5m² – 0,43m² übrig). Das kostet dann $16 \cdot 14\text{€} = 224\text{€}$.

3) a) Der Umfang eines Kreises beträgt 30cm. Wie groß ist dessen Radius?

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

$$30\text{cm} = 2 \cdot r \cdot \pi \quad | :2$$

$$15\text{cm} = r \cdot \pi \quad | : \pi$$

$$r = 15\text{cm} : \pi \approx 4,77\text{cm}$$

Wir hätten auch erst die Formel umstellen und dann einsetzen können ($r = U/(2 \cdot \pi)$).

b) Ein Fahrrad legt, wenn sich ein Reifen 100-mal dreht, insgesamt 200m zurück.

Wie groß ist der Durchmesser des Reifens?

Wenn das Rad mit 100 Umdrehungen 200m zurücklegt, dann legt es mit einer Umdrehung 2m zurück und der Umfang des Rades beträgt 2m. Damit kann wie bei a) vorgegangen werden:

$$U = d \cdot \pi \Leftrightarrow d = U : \pi = 2\text{m} : \pi \approx 0,64\text{m}, \text{ womit der Durchmesser ca. } 0,64\text{m} \text{ beträgt.}$$

4) Innerhalb eines Kreises mit 10cm Durchmesser befindet sich ein Kreis mit 8cm Durchmesser. Wie groß ist die Fläche des Kreisrings?

Wir müssen von der großen Kreisfläche die kleine subtrahieren:

Radius des großen Kreises: $R = 10\text{cm} / 2 = 5\text{cm}$ (oder $r_a = 5\text{cm}$)

Radius des kleinen Kreises: $r = 8\text{cm} / 2 = 4\text{cm}$ (oder $r_i = 4\text{cm}$)

$$A = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi \quad \text{oder} \quad A = (R^2 - r^2) \cdot \pi$$

$$A = (5\text{cm})^2 \cdot \pi - (4\text{cm})^2 \cdot \pi \quad (\text{ohne Einheiten: } A = 5^2 \cdot \pi - 4^2 \cdot \pi)$$

$$A \approx 28,27\text{cm}^2$$

5) Ein Beet und ein runder Weg um das Beet bilden einen Kreisring. Das Beet hat einen Durchmesser von 4,8m und der Weg ist 1m breit.

a) Welche Fläche hat der Weg?

Wenn $d = 4,8\text{m}$ gilt, dann ist $r = 4,8\text{m} / 2 = 2,4\text{m}$

$r = 2,4\text{m}$, womit $R = 2,4\text{m} + 1\text{m} = 3,4\text{m}$ ist (da der Weg 1m breit ist).

Mit $A = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi$ ergibt sich $A \approx 18,22\text{m}^2$

b) Welche Kosten entstehen beim Pflastern des Weges, wenn für 1m^2 die Pflastersteine 40€ kosten?

Kosten ca.: $18,22 \cdot 40\text{€} = 728,8 \text{ €}$.

Belässt man den Wert für die Fläche A im Taschenrechner, statt den auf 2 Nachkommastellen gerundeten Wert von 18,22 zu verwenden, dann ergeben sich Kosten von ca. 728,85€. Die sollte besser getan werden, um Rundungsfehler zu vermeiden.

6) Aus einem rechteckigen Blech mit den Maßen 28cm x 10cm sollen 3 Kreise mit jeweils Radius $r = 4\text{cm}$ ausgestanzt werden.

a) Wie groß ist die Fläche des Abfalls (orangen Fläche)?

$$\text{Rechteckfläche: } A_R = 28\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 280\text{cm}^2$$

$$\text{Eine Kreisfläche: } A_K = r^2 \cdot \pi = (4\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 50,27\text{cm}^2$$

$$A = A_R - 3 \cdot A_K \approx 129,2\text{cm}^2 \quad (\text{hier haben wir den Wert von } A_K \text{ im Taschenrechner belassen})$$

b) Wie viel Prozent beträgt der Abfall an der gesamten Rechteckfläche?

$$A / A_R \cdot 100 = 129,2\text{cm}^2 / 280\text{cm}^2 \cdot 100 \approx 46,1\%, \text{ also ca. } 46,1\% \text{ Abfall.}$$

Mit einer Dreisatztafel:

Fläche in cm^2	Anteil
280	100%
1	$100\% / 280 = 0,35714...\%$
129,2	$0,35714...\% \cdot 129,2 \approx 46,1\%$

7) Mit einem Quadrat mit 10cm Seitenlänge wurden Kreise umrahmt. Wie groß ist die (orangene) Fläche innerhalb der Quadrate und außerhalb der Kreise?

$$\text{a) Quadratfläche: } A_Q = (10\text{cm})^2 = 100\text{cm}^2$$

$$\text{Kreisfläche: } A_K = r^2 \cdot \pi = (5\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 78,54\text{cm}^2 \quad (\text{der Durchmesser } d \text{ beträgt } 10\text{cm})$$

$$A = A_Q - A_K \approx 21,46\text{cm}^2$$

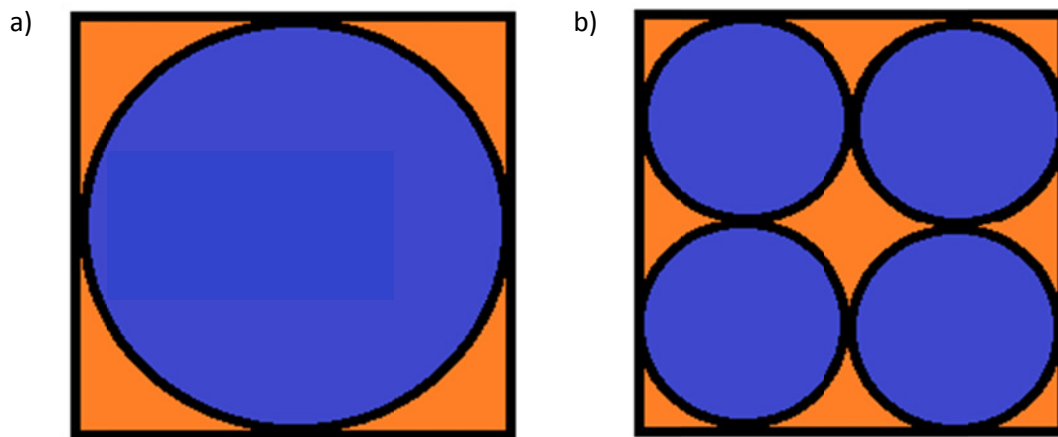
b) Hier ist der Durchmesser d eines kleinen Kreises $d = 10\text{cm} : 2 = 5\text{cm}$ und damit der Radius eines kleinen Kreises $r = 5\text{cm} : 2 = 2,5\text{cm}$.

Quadratfläche: $A_Q = (10\text{cm})^2 = 100\text{cm}^2$

Eine Kreisfläche: $A_K = r^2 \cdot \pi = (2,5\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 19,63\text{cm}^2$

$A = A_Q - 4A_K \approx 21,46\text{cm}^2$ (wenn mit dem Wert von der Kreisfläche A_K aus dem Taschenrechner gerechnet wird, mit dem gerundeten Wert von A_K ergibt sich $A \approx 21,48\text{cm}^2$).

Damit ist die Fläche A aus a) so groß wie bei b). Warum? Bei a) hat der Kreis den doppelten Radius wie der bei b). Doppelter Radius bedeutet 4-fache Fläche. Da es bei b) 4 Kreise sind, haben diese zusammen dieselbe Fläche wie der große Kreis bei a).



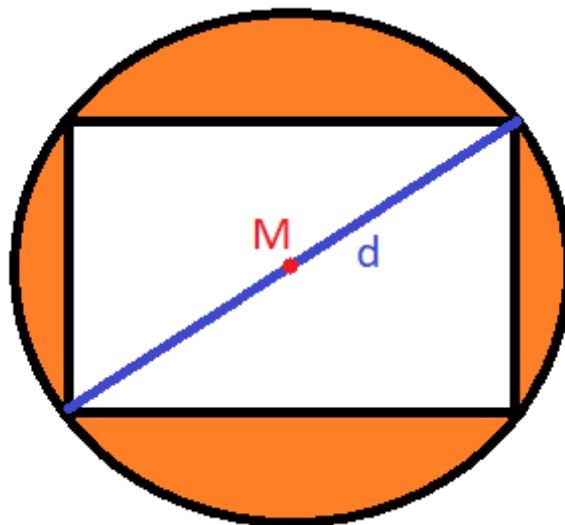
8) Innerhalb eines Kreises befindet sich ein Quadrat mit den Seitenlängen 9cm und 12cm . Die Diagonale d ist 15cm lang. Wie groß ist die (orangene) Fläche innerhalb des Kreises und außerhalb des Rechtecks?

Der Durchmesser des Kreises ist so lange wie die Diagonale des Rechtecks. Damit ist $r = 7,5\text{cm}$.

Rechteckfläche: $A_R = 9\text{cm} \cdot 12\text{cm} = 108\text{cm}^2$

Kreisfläche: $A_K = r^2 \cdot \pi = (7,5\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 176,71\text{cm}^2$

$A = A_K - A_R \approx 68,71\text{cm}^2$



9) Ein Kreisausschnitt hat einen Radius von 14cm und einen Winkel von $\alpha = 40^\circ$.

a) Wie groß ist die Fläche und wie groß die Länge des Kreisbogens b?

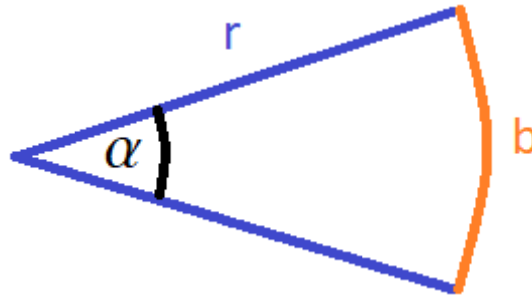
$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi = \frac{40^\circ}{180^\circ} \cdot 14\text{cm} \cdot \pi \approx 9,77\text{cm}$$

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{40^\circ}{360^\circ} \cdot (14\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 68,42\text{cm}^2$$

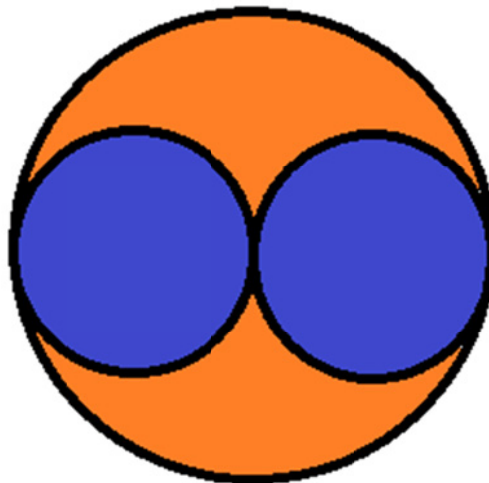
b) Wie groß ist der komplette Umfang des Kreisausschnitts?

Für den Umfang müssen wir noch zweimal den Radius zu b addieren:

$$U \approx 9,77\text{cm} + 28\text{cm} = 37,77\text{cm}$$



10) In einem großen Kreis wurden zwei kleinere Kreise einverleibt:



a) Wie groß ist die (orangene) Fläche innerhalb des großen Kreises und außerhalb der kleinen Kreise, wenn der große Kreis einen Radius von 12cm hat?

Der große Kreis hat einen Radius von $R = 12\text{cm}$ und damit hat ein kleiner Kreis einen Radius von $r = 6\text{cm}$. Wir könnten wieder die Flächen einzeln berechnen und dann die zwei kleinen Kreisflächen von der großen Kreisfläche subtrahieren, oder wir rechnen in einem Schritt:

$$A = R^2 \cdot \pi - 2 \cdot r^2 \cdot \pi = (12\text{cm})^2 \cdot \pi - 2 \cdot (6\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 226,19\text{cm}^2$$

b) Es soll eine Formel für die Fläche aus a) hergeleitet werden, wenn der große Kreis den Radius R hat.

Wir können die Formel aus a) verwenden und $r = R/2 = 1/2 \cdot R$ einsetzen:

$$A = R^2 \cdot \pi - 2 \cdot r^2 \cdot \pi = R^2 \cdot \pi - 2 \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \pi = R^2 \cdot \pi - 2 \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \pi = R^2 \cdot \pi - \frac{R^2}{2} \cdot \pi = \frac{R^2}{2} \cdot \pi$$

11) Wenn ein Kreisausschnitt eine Bogenlänge von $b = 8,9\text{m}$ hat und einen Winkel α von 60° , wie groß ist dann der Radius?

$$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$$

$$8,9\text{m} = \frac{60^\circ}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$$

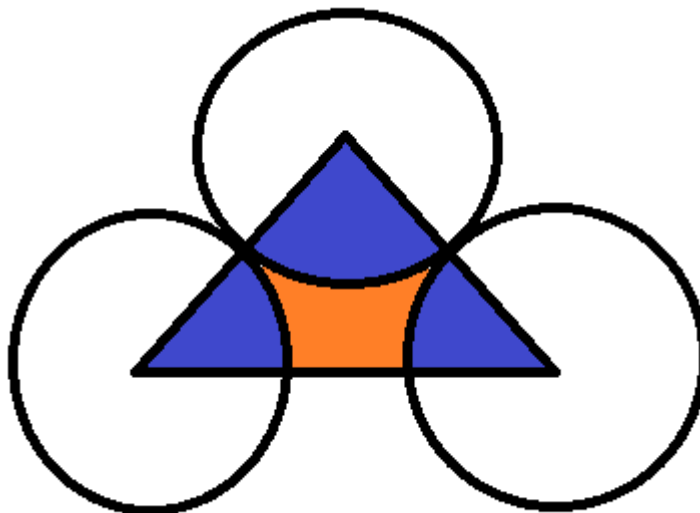
$$8,9\text{m} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot \pi \quad | :1/3 \text{ bzw. } \cdot 3$$

$$26,7\text{m} = r \cdot \pi \quad | : \pi$$

$$r \approx 8,5\text{m}$$

Wir hätten die Formel auch erst umformen und dann einsetzen können: $r = \frac{b \cdot 180^\circ}{\alpha \cdot \pi}$

12) Um die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks wurden Kreise mit gleich großen Radien gezogen. Die beiden Basiswinkel betragen 45° und die Schenkel sind jeweils 12cm lang. Gesucht wird die (orangene) Fläche innerhalb des Dreiecks und außerhalb der Kreise.



Die Radien der Kreise betragen alle 6cm (halbe Schenkellänge). Die unteren Kreisausschnitte haben einen Winkel von $\alpha_1 = 45^\circ$. Da die Winkelsumme 180° beträgt, hat der obere Kreisausschnitt einen Winkel von $\alpha_2 = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

$$\text{Kreisausschnitt unten (nur einer): } A_1 = \frac{\alpha_1}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot (6\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 14,14\text{cm}^2$$

$$\text{Kreisausschnitt oben: } A_2 = \frac{\alpha_2}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot (6\text{cm})^2 \cdot \pi \approx 28,27\text{cm}^2$$

Wir hätten auch die Winkel aller Kreisausschnitte addieren können, da die Radien alle gleich sind.

Da das Dreieck rechtwinklig ist, benötigen wir keine Höhe, denn die beiden Seiten, die am rechten Winkel anliegen (die Katheten), sind 12cm lang, womit die Dreiecksfläche $A_D = 12\text{cm} \cdot 12\text{cm} / 2 = 72\text{cm}^2$ groß ist. Die orangene Fläche beträgt dann $A = A_D - 2 \cdot A_1 - A_2 = 15,45\text{cm}^2$.